Οι συναρτήσεις μιας Καμπύλης: Η αρχική έννοια της συνάρτησης κατά τον Leibniz και το νόημά της στην Παραβολή

David Dennis & Jere Confrey

The College mathematics Journal, Volume 26, Issue 2 (Mar., 1995), 124-131.

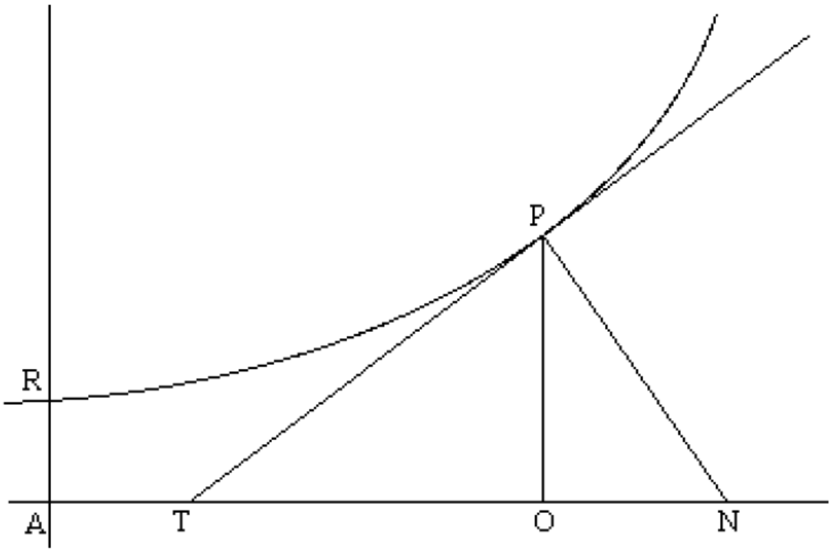
Σταθερό URL: http://www.quadrivium.info/mathhistory/Parabola.pdf

Όταν η έννοια της συνάρτησης αναπτύχθηκε στα μαθηματικά στο τέλος του $17^{ου}$ αιώνα, η έννοια ήταν πολύ διαφορετική από τη σύγχρονη θεώρησή της, και επίσης διαφορετική από τις αλγεβρικές έννοιες του $19^{ου}$ αιώνα. Η κύρια διαφορά στη σύλληψη του όρου ήταν ότι θεωρούσαν πως οι καμπύλες είχαν αρχέγονη ύπαρξη ανεξάρτητα από την ανάλυση των αριθμητικών και αλγεβρικών τους ιδιοτήτων. Οι εξισώσεις δεν δημιουργούν καμπύλες, οι καμπύλες γεννούν τις εξισώσεις. Όταν ο Descartes δημοσίευσε την *Γεωμετρία* του [10] το 1938, εξήγαγε για πρώτη φορά τις αλγεβρικές εξισώσεις πολλών καμπύλων, αλλά ούτε μία φορά δημιούργησε μια καμπύλη από την αποτύπωση σημείων που ικανοποιούν μια εξίσωση. Οι γεωμετρικές μέθοδοι κατασκευής καμπύλων δίνονταν πάντα πρώτες, και έπειτα, από την ανάλυση των γεωμετρικών ενεργειών που πραγματοποιήθηκαν στον σχεδιασμό της καμπύλης θα έφταναν στην εξίσωση της καμπύλης που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων της (όχι απαραίτητα σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταμένων).[20]. Ο Descartes χρησιμοποίησε τις εξισώσεις για να δημιουργήσει μια ιεράρχηση (ταξινομία) των καμπύλων [17].

Αυτή η παράδοση να βλέπουμε τις καμπύλες ως το αποτέλεσμα γεωμετρικών ενεργειών συνεχίστηκε στις εργασίες των Roberval, Pascal, Newton, και Leibniz. O Descartes χρησιμοποίησε γράμματα για να συμβολίσει διάφορα μήκη αλλά δεν δημιούργησε ένα συγκεκριμένο σύστημα ονομασιών. Ο Leibniz, που εισήγαγε τον όρο *συνάρτηση* στα μαθηματικά [2], θεώρησε έξι διαφορετικά μεγέθη που σχετίζονται με μια καμπύλη τα οποία ήταν τμήματα ή μήκη που μπορούσαν να προσδιοριστούν για κάθε σημείο της καμπύλης αναφορικά με ένα σύστημα συντεταγμένων. Τους έδωσε τα ακόλουθα ονόματα: τετμημένη (abscissa), τεταγμένη (ordinate), εφαπτομένη (tangent), υπεφαπτομένη (subtangent), κανονική (normal) και υποκανονική (subnormal). Αυτά τα έξι μεγέθη φαίνονται στο Σχήμα 1 για την καμπύλη RP, αναφορικά με τον άξονα AO. Το τμήμα PO είναι κάθετο στο PT.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε εδώ ότι η καμπύλη και ο άξονας πρέπει να υπάρχουν προτού αυτά τα έξι μεγέθη μπορέσουν να οριστούν. Κατ' αυτόν τον ορισμό, η τετμημένη και η τεταγμένη ίσως αρχικά να φαντάζουν ως την παραμετρική έκφραση της καμπύλης, αλλά δεν είναι έτσι. Καμία παράμετρος, κανένας χρόνος ή καμία γωνία δεν εμπλέκονται. Η προσέγγιση είναι ολοκληρωτικά γεωμετρική. Από το γεωμετρικό σημείο P, τα τμήματα (μεγέθη) ορίζονται αναφορικά με τον άξονα AO. Ο όρος *Abscissa* (τετμημένη) στα Λατινικά δηλώνει «εκείνο που έχει κοπεί», δηλ. ένα κομμάτι του άξονα AO έχει κοπεί. Αλλά κόβοντας διαδοχικά κομμάτια του άξονα, η καμπύλη μας δίνει μια διαταγμένη ακολουθία τμημάτων PO καθώς το P κινείται επάνω στην καμπύλη. Ως εκ τούτου και ο όρος *τεταγμένη*.

Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε εδώ ότι όλα αυτά τα μεγέθη από ένα σημείο P σε μια δοσμένη καμπύλη ορίζονται χωρίς την αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης. Είναι τμήματα. Ο Leibniz φυσικά, όπως τον Descartes, ήθελε να εισαγάγει κάποια μετρησιμότητα και να αναλύσει τις ιδιότητες μιας καμπύλης αλγεβρικά, αλλά εφόσον ο ορισμός της συνάρτησης είναι γεωμετρικός, θα μπορούσε να αναβάλει την επιλογή της μονάδας μέτρησης μέχρις ότου μπορούσε να βρει την πιο κατάλληλη για τη δοσμένη καμπύλη. Το πλεονέκτημα αυτό θα αναδειχθεί στην συζήτησή μας για την παραβολή.



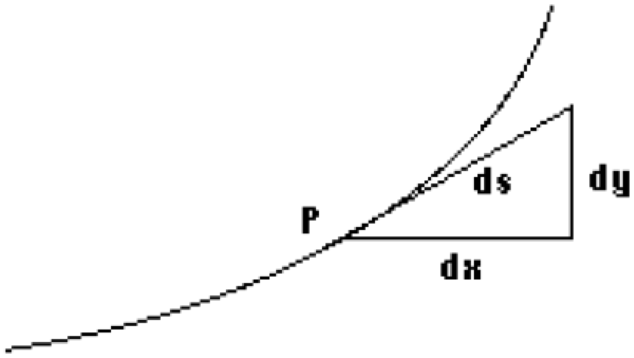
PO=τεταγμένη	AO=τετμημένη
PT=εφαπτομένη	OT=υπεφαπτομένη
PN=κανονική	ON=υποκανονική

Σχήμα 1

Καθώς τα τρίγωνα TPN, POT και PON είναι ορθογώνια, τα τρίγωνα TOP, PON και TPN είναι όλα όμοια. Αυτός ο σχηματισμός είναι οικείος στους γεωμέτρες ως την κατασκευή του γεωμετρικού μέσου των ON και OT, με το OP να είναι ο μέσος.

Εμπνευσμένος από το έργο του Pascal, ο Leibniz είδε ένα τέταρτο τρίγωνο που ήταν όμοιο με τα τρία προαναφερόμενα [5], [2], [11]. Αυτό ήταν το *απειροελάχιστο* ή το *χαρακτηριστικό* τρίγωνο (βλ. Σχήμα 2), που χρησιμοποιήθηκε από τον Pascal για να ολοκληρώσει την συνάρτηση ημίτονο [21]. Ο Leibniz φαντάστηκε πως μια γεωμετρική καμπύλη σχηματίζεται από άπειρα μικρά τμήματα που το καθένα είχε μια ορισμένη κατεύθυνση. Αντιλήφθηκε τη χρησιμότητα αυτής της σύλληψης στο έργο του Pascal, η οποία έγινε μια από τις πρωταρχικές έννοιες στην ανάπτυξη ενός συστήματος συμβολισμού για τον Απειροστικό Λογισμό.

Παρόλο που πολλοί μοντέρνοι μαθηματικοί αποφεύγουν αυτήν την σύλληψη, ακόμα χρησιμοποιείται ως μια σημαντική εννοιολογική κατασκευή από τους μηχανικούς. Το σχήμα 2 ακόμα εμφανίζεται σε βιβλία Απειροστικού Λογισμού γιατί μεταβιβάζει ένα σημαντικό νόημα, ιδιαίτερα σε εκείνους που χρησιμοποιούν λογισμό για την ανάλυση φυσικών η μηχανικών ενεργειών[1].

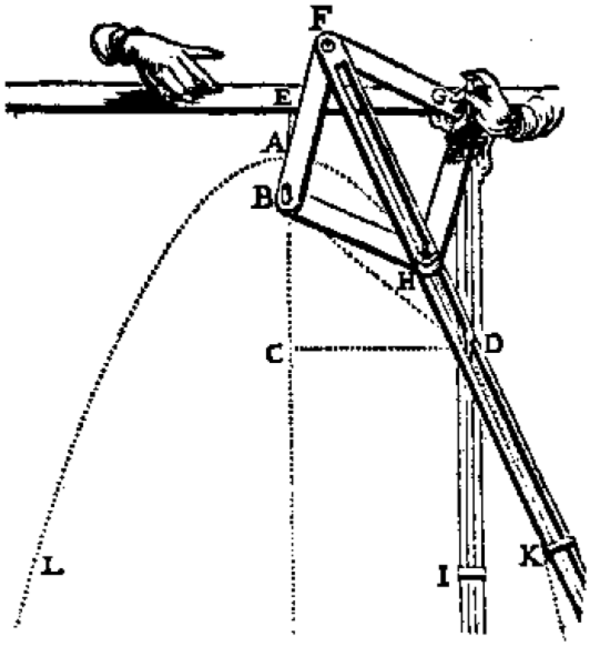


Σχήμα 2

Ο Leibniz είδε πως τα τρίγωνα στο Σχήμα 1 έχουν μεγάλη σημασία, καθώς ήταν μεγάλα και ορατά και όμοια με το αόρατο χαρακτηριστικό τρίγωνο. Αυτό το εύρημα των μεγάλων τριγώνων που είναι όμοια με το απειροελάχιστο είναι ένα θέμα που διατρέχει πολλά και πολύ σημαντικά έργα του Leibniz [8], [11]. Από τα σχήματα 1 και 2, οι σχέσεις ομοιότητα μας λένε ότι $\frac{dy}{dx}=\frac{PO}{OT}=\frac{ON}{PO}$.

Ας δούμε πώς αυτό το σύστημα λειτουργεί στην περίπτωση της παραβολής. Πρώτα θα πρέπει να έχουμε έναν τρόπο να σχεδιάσουμε την παραβολή. Όλα ξεκινούν από την ύπαρξη μιας καμπύλης. Το σχήμα 3 απεικονίζει έναν σύνδεσμο που σχεδιάζει παραβολικές καμπύλες. Αυτό το σχήμα προέρχεται από την εργασία του Franz Van Schooten (1615-1660)[23, p. 359] του οποίου οι εκτενείς σχολιασμοί στην *Γεωμετρία* του Descartes διαβάστηκαν ευρέως κατά τον 17^{o} αιώνα [22]. Καθώς το έργο του περιέχει αρκετές από τις λεπτομέρειες που παραλήφθηκαν από τον Descartes ήταν πιο δημοφιλές από την ίδια την *Γεωμετρία*.

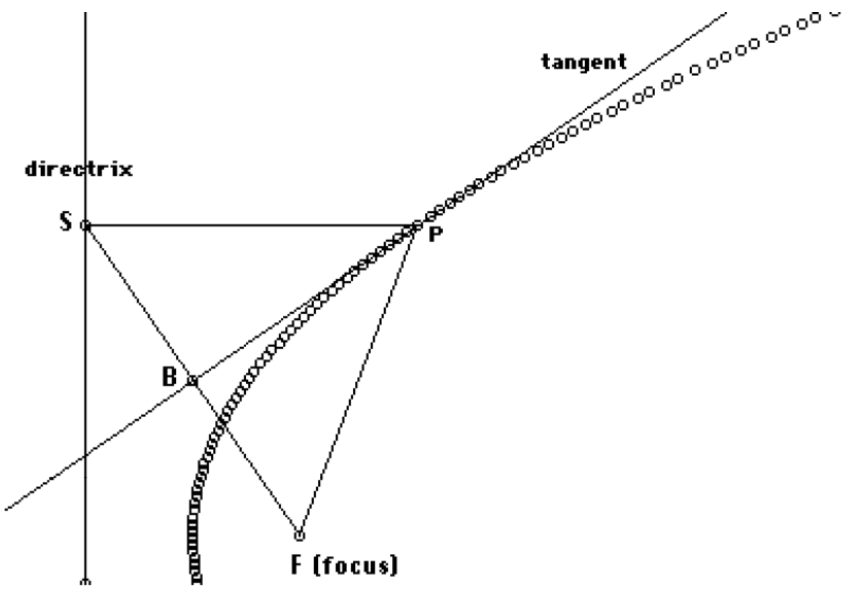
[1] Με την εφεύρεση, νωρίς αυτόν τον αιώνα, του λογισμού των διαφορικών ως γραμμικές συναρτήσεις επάνω στην εφαπτομένη μιας καμπύλης, η θεμελιώδης σύλληψη του Leibniz έγινε αυστηρή, χωρίς αναφορά στα «απειροελάχιστα» [18, π.92].



Σχήμα 3

Αυτή η συσκευή κατασκευάζει την παραβολή από τον γνωστό εστία/διευθετούσα ορισμό. Δηλαδή, η παραβολή είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από ένα σημείο και μια ευθεία. Ο κανόνας GE είναι η διευθετούσα και το σημείο B είναι η εστία. Τέσσερις ίσοι σε μέγεθος σύνδεσμοι δημιουργούν έναν κινούμενο ρόμβο, BFGH, που εξασφαλίζει ότι η FH είναι πάντα η μεσοκάθετος του BG, καθώς το G κινείται κατά μήκος του κανόνα. Ο GI είναι ένας κινούμενος κανόνας που είναι πάντοτε κάθετος στη διευθετούσα EG. Το σημείο D είναι η τομή των FH και GI καθώς το G κινείται κατά μήκος της διευθετούσας. Συνεπώς, σε όλες τις θέσεις BD=GD και επομένως το D διαγράφει μια παραβολή με εστία B και διευθετούσα EG.

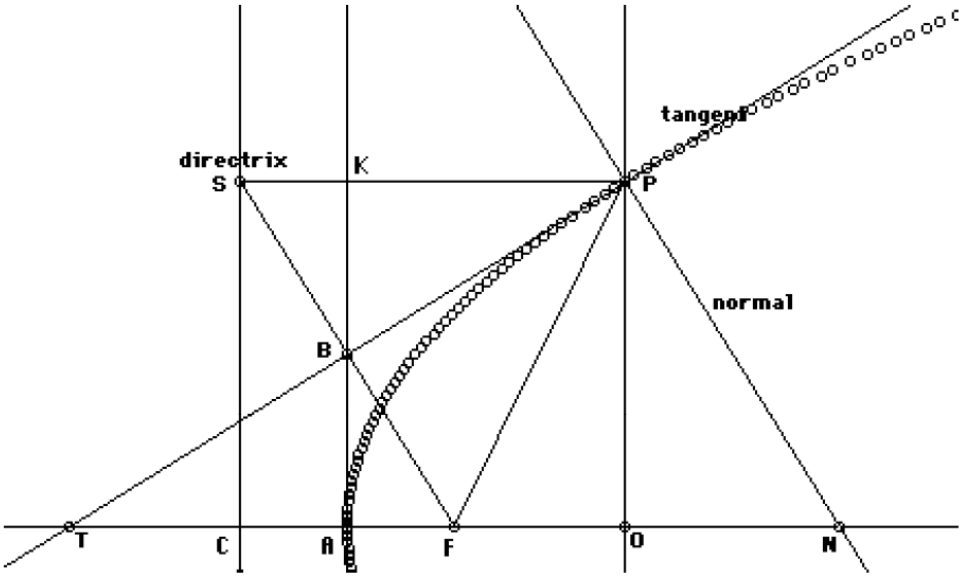
Αυτή η κατασκευή μπορεί να αναπαραχθεί με έναν υπολογιστή χρησιμοποιώντας το λογισμικό *Geometer's Sketchpad* ™ [14]. Αυτό το λογισμικό επιτρέπει σε κάποιον να ορίσει την μεσοκάθετο τμήματος, έτσι δεν είναι απαραίτητος ο ρόμβος. Κάποιος μπορεί είτε να τραβήξει ο ίδιος ένα σημείο κατά μήκος της διευθετούσας, είτε να βάλει τον υπολογιστή να κάνει αυτόματα αυτήν την κίνηση. Το σχήμα 4 δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας αυτό το λογισμικό. Το σημείο F είναι η εστία, και το σημείο S κινείται κατά μήκος της διευθετούσας. Η BP είναι η μεσοκάθετος του FS, η SP είναι πάντα κάθετη στη διευθετούσα και το σημείο τομής P διαγράφει μια παραβολή.



Σχήμα 4

Μια συνέπεια αυτής της κατασκευής που φαίνεται αμέσως να είναι προφανής στο μάτι είναι ότι σε κάθε σημείο η BP είναι η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη στο P. Συχνά οι καμπύλες μπορούν να σχεδιαστούν από την κατασκευή μιας σειράς εφαπτόμενων σε καμπύλη, όπου η καμπύλη είναι το «περίβλημα» των οικογενειών των εφαπτόμενων γραμμών σε αυτήν. Αυτό συχνά μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας σπάγκο ή διπλώσεις σε χαρτί [19], [13]. Προκειμένου να διπλώσουμε μια παραβολή όπως το Σχήμα 4, θεωρούμε τη μια πλευρά του χαρτιού ως τη διευθετούσα και σημειώνουμε ένα σημείο για την εστία. Κάνουμε στη συνέχεια μια σειρά από διπλώσεις, όπου κάθε φορά μεταφέρουμε κάποιο σημείο της διευθετούσας ακριβώς επάνω στην εστία. Έτσι αυτές οι διπλώσεις θα είναι οι μεσοκάθετοι των τμημάτων με άκρα αυτά τα ζεύγη σημείων, και επομένως θα είναι εφαπτόμενες ευθείες στην παραβολή.

Χρησιμοποιώντας τον άξονα συμμετρίας της παραβολής ως τον άξονα των τετμημένων και την κορυφή A ως την αρχή του άξονα, μπορούμε να διερευνήσουμε αυτήν την καμπύλη χρησιμοποιώντας τα έξι μεγέθη του Leibniz (Σχήμα 5). Καθώς η εφαπτόμενη ευθεία είναι μέρος της κατασκευής αυτό μπορεί αμέσως να επιτευχθεί με το *Geometer's Sketchpad*. Είναι αδύνατον να μεταφέρουμε την αίσθηση της κινούμενης κατασκευής στο χαρτί γι' αυτό θα παροτρύναμε ισχυρά τον αναγνώστη να το δοκιμάσει, τραβώντας το σημείο S πάνω κάτω στην διευθετούσα και να παρατηρήσει πώς το «σύστημα του Leibniz" μεταβάλλεται.



Σχήμα 5

Τι καταλαβαίνουμε από την παρακολούθηση των έξι μεγεθών σε αυτό το δυναμικό πλαίσιο; Με το σχήμα σε κίνηση και χρησιμοποιώντας χρώμα για να τονίσουμε τα έξη μεγέθη, δύο αναλλοίωτα γίνονται αμέσως εμφανή. Το πρώτο που οι περισσότεροι άνθρωποι προσέχουν είναι ότι η υποκανονική, ON, έχει σταθερό μήκος. Το δεύτερο ότι η κορυφή A είναι πάντα το μέσο της επεφαπτομένης, OT, γιατί τα σημεία O και T φαίνονται να πλησιάζουν και να απομακρύνονται από το σημείο A συμμετρικά. Αυτά τα δύο αναλλοίωτα μπορούν εύκολα να προκύψουν από την γεωμετρική κατασκευή, αλλά είναι μεγαλύτερης σημασίας το γεγονός ότι μπορούν να αναγνωριστούν οπτικά από την κίνηση της κατασκευής. Το Geometer’s Sketchpad επιτρέπει σε κάποιον να επιβεβαιώσει τις οπτικές του αντιλήψεις, ενεργοποιώντας μετρητές που βρίσκουν το μήκος αυτών των τμημάτων εμπειρικά. Εξακριβωμένα, το ON έχει σταθερό μήκος και το μήκος του AT είναι πάντα ίσο με το μήκος του AO.

Αναβάλλοντας για λίγο την γεωμετρική απόδειξη αυτών των προτάσεων, ας δούμε πρώτα τι μας λένε για την παραβολή. Κατά την παράδοση του Descartes, εισάγουμε μεταβλητές αφού πρώτα έχουμε σχεδιάσει την καμπύλη. Έστω x=AO, και y=PO, δηλ. το x είναι το μήκος της τετμημένης και το y είναι το μήκος της τεταγμένης. Μια και τα τρίγωνα TOP και PON είναι όμοια, έχουμε ότι $\frac{PO}{OT}=\frac{ON}{PO}$. Μια και το A είναι το μέσο του OT, αυτό γίνεται $\frac{y}{2x}=\frac{ON}{y}$, ή $(2\cdot ON)\cdot x=y^2$. Μια και το ON είναι σταθερό, αυτό οδηγεί στην εξίσωση της παραβολής. Το σταθερό μήκος (2·ON) είναι γνωστό στη γεωμετρία ως το *latus rectum*, αυτό σημαίνει ότι το ορθογώνιο που σχηματίζεται από το x και το latus rectum έχει το ίδιο εμβαδόν με το τετράγωνο πλευράς y. Και καθώς είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε τη μονάδα μας, θα διαλέγαμε ON = 1/2. Η εξίσωση τότε γίνεται $x=y^2$.

Χρησιμοποιώντας την ομοιότητα ανάμεσα στο χαρακτηριστικό τρίγωνο και το τρίγωνο TOP, παίρνουμε $\frac{dx}{dy}=\frac{OT}{PO}=\frac{2x}{y}=2y$. Συνεπώς, τόσο η εξίσωση, όσο και η παράγωγος μπορούν να βρεθούν λαμβάνοντας υπόψη τις αναλλοίωτες ιδιότητες του συστήματος του Leibniz, υπό τις ενέργειες που δημιούργησαν την καμπύλη.

Η επιλογή του ON=1/2 έδωσε την εξίσωση και την εφαπτομένη της παραβολής στην πιο γνωστή της μορφή, αλλά αυτό είναι λίγο πλασματικό από γεωμετρική άποψη. Η υποκανονική ON είναι η πρωταρχική αναλλοίωτη αυτής ενέργειας σχεδιασμού-καμπύλης και μπορεί να θεωρηθεί ως η φυσική επιλογή για μια μονάδα για αυτή την καμπύλη. Όπως προκύπτει, η υποκανονική ON είναι πάντα ίση με την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα της παραβολής. Συνεπώς είναι μια φυσική μονάδα. Χρησιμοποιώντας την υποκανονική ως μονάδα, η εξίσωση της παραβολής γίνεται $x=\frac{y^2}{2}$, που πρόκειται για τον γνωστό ολοκληρωτικό τύπο της παραβολής ως το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την x=y. Είναι στη μορφή που η παραβολή συχνότερα εμφανίζεται στον πίνακα των παρεμβολών (interpolations) των John Wallis και Isaac Newton [9].

Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι η υποκανονική είναι σταθερή, είναι να δείξουμε ότι ισούται πάντα με την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα. Βλέποντας το Σχήμα 5, διαπιστώνουμε ότι τα SF και PN είναι και τα δύο κάθετα στο BP, έτσι τα τρίγωνα SCF και PON είναι ίσα, επομένως ON=CF.

Για να δείξουμε ότι η κορυφή A είναι πάντα το μέσο της υπεφαπτομένης OT, αρκεί κάποιος να δείξει ότι τα τρίγωνα TBA και PBK είναι ίσα. Προφανώς είναι όμοια, αλλά εφόσον το B είναι το μέσο της SF, θα είναι και το μέσο της AK, έτσι είναι ίσα τα τρίγωνα. Συνεπώς TA=KP=AO.

Τέλος, ίσως κάποιος ρωτήσει: πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η ευθεία BP είναι πάντα εφαπτομένη στην παραβολή; Που σημαίνει, πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι κάθε στιγμιότυπο της γραμμής BP τέμνει την παραβολή σε ένα μόνο σημείο; Έστω $Q \neq P$ να είναι ένα σημείο στην BP, και έστω R να είναι το ίχνος της καθέτου από το Q στην διευθετούσα CS. Καθώς το R είναι το πλησιέστερο σημείο της διευθετούσας στο Q, $QR<QS$. Μια και η BP είναι η μεσοκάθετος του SF, QS=QF. Συνεπώς $QR<QF$ και το Q δεν μπορεί να είναι στην παραβολή, καθώς είναι πιο κοντά στη διευθετούσα παρά στην εστία. Κάποιος θα μπορούσε επίσης να ελέγξει κατά πόσο η BP είναι εφαπτομένη, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύστημα συντεταγμένων, και λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων, καταλήγοντας σε δευτεροβάθμια εξίσωση με μια διπλή ρίζα. Αυτή είναι η μέθοδος που ακολούθησε ο Descartes για να βρίσκει εφαπτόμενες, δηλ. οι εφαπτόμενες εμφανίζονται όταν προκύπτουν διπλές ρίζες στην επίλυση ενός συστήματος.

Αυτές οι δύο αναλλοίωτες ιδιότητες της παραβολής ποτέ δεν αναφέρθηκαν (από όσο γνωρίζουμε) στο δημοσιευμένο έργο του Leibniz. Το γεγονός ότι η κορυφή είναι το μέσο της υπεφαπτομένης αποδείχθηκε από τον Απολλώνιο [1]. Το γεγονός ότι η υποκανονική είναι σταθερή αποδίδεται στον L. Euler, που διεύρυνε και διέδωσε τις ιδέες του Leibniz [7]. Και οι δύο βρίσκονται στο Βιβλίο 2 του πιο γνωστού κειμένου του Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite* [12]. Αυτό το βιβλίο, που εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1748, ήταν το πρώτο μοντέρνο προ του Απειροστικού Λογισμού κείμενο και μαζί με τη συνέπεια του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού, προσέφερε πολλά στο να τυποποιηθούν το περιεχόμενο και οι συμβολισμοί. Σχεδόν όλα τα θέματα των μοντέρνων προ Απειροστικού Λογισμού βιβλίων περιλαμβάνονται στο βιβλίο του Euler, αλλά αυτό που λείπει από τους μοντέρνους χειρισμούς μας είναι το τολμηρό εμπειρικό πνεύμα των διερευνήσεων του Euler, καθώς και το περισσότερο μέρος από την πιο προχωρημένη γεωμετρία του και τις άπειρες σειρές του. Ο Euler αναφέρει στην εισαγωγή του κειμένου του ότι παρουσιάζει πολλά ερωτήματα που μπορούν πολύ πιο γρήγορα να απαντηθούν με την χρήση Απειροστικού Λογισμού. Παρόλα αυτά, επιμένει ότι οι μαθητές τρέχουν στον Απειροστικό Λογισμό με μεγάλη βιασύνη, και ότι θα μπερδευτούν τελικά γιατί στερούνται το εμπειρικό υπόβαθρο (τόσο το γεωμετρικό όσο και το αλγεβρικό) πάνω στο οποίο έχει δομηθεί ο Απειροστικός Λογισμός.

Το παράδειγμα της παραβολής καταδεικνύει πόσα πολλά μπορούν να ευρεθούν χρησιμοποιώντας μόνο την βασική γεωμετρία συνδυασμένη με εμπειρική διερεύνηση. Αφήνοντας το σύστημα να κινηθεί, δημιουργούμε μια κατάσταση όπου η άλγεβρα απορρέει με φυσικό τρόπο από την γεωμετρία. Πολύ συχνά στα σχολεία μας διαπιστώνουμε ότι το περιεχόμενο της γεωμετρίας είναι στατικό και απομονωμένο από άλλα θέματα, ιδιαίτερα από την άλγεβρα. Γεωμετρικές αποδείξεις των δύο στηλών παρέχουν μια σκιά του Ευκλείδη, αλλά δεν μπορούν να δώσουν την δυναμική εμπειρία που οδηγεί στην κατανόηση των συναρτήσεων και του απειροστικού λογισμού. Μια σημαντική φιλοσοφική προϋπόθεση για την κατανόηση του απειροστικού λογισμού είναι η πεποίθηση ότι η γεωμετρία και η άλγεβρα είναι συνεπείς η μια προς την άλλη, και ιστορικά αυτή η πεποίθηση δεν ήρθε εύκολα [4]. Αυτήν την πεποίθηση πολύ συχνά την υποθέτουμε σιωπηλά στα μαθήματά μας. Για να την κατανοήσουν και να την εκτιμήσουν οι μαθητές μας θα πρέπει πρώτα να αφεθούν στην αμφισβήτηση κατά πόσο ένα γεωμετρικό αποτέλεσμα θα επιβεβαιωθεί από ένα αριθμητικό [8]. Με το μοντέρνο λογισμικό, οι υπολογιστές μπορούν τώρα εύκολα να αναπαραστήσουν κινούμενη γεωμετρία και αυτή η εμπειρία μπορεί να είναι πολύ δυνατή-επιβλητική.

Για τον αναγνώστη που επιθυμεί να επιχειρήσει μια τέτοιου είδους ανάλυση σε άλλες καμπύλες, δίνουμε το ακόλουθο βασανιστικό μεζεδάκι. Εάν η διευθετούσα στην παραπάνω κατασκευή ήταν κύκλος αντί για ευθεία, τότε κάποιος μπορεί να σχεδιάσει τόσο υπερβολές, όσος και ελλείψεις με τις εφαπτόμενες ευθείες τους [8]], [23][2]. Η χαρτοδιπλωτική επίσης δουλεύει [19], [13]. Στην περίπτωση της υπερβολής, εάν μια εφαπτομένη ευθεία σε ένα σημείο P προεκταθεί μέχρι να τμήσει τις ασύμπτωτες στα σημεία A και B, τότε το P θα είναι πάντα το μέσο του AB. Αυτό το

[2] Για μια συζήτηση για το πώς αυτή η γενική μέθοδος σχεδιασμού κωνικών μπορεί να εφαρμοστεί στις πλανητικές τροχιές, δείτε το θαυμάσιο άρθρο του A. Lenard [16].

ελάχιστα-γνωστό θεώρημα βρίσκεται στο Euler [12] αλλά πηγαίνει πίσω στον Απολλώνιο [2]. Σαν μια εμπειρική παρατήρηση αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πολλές αναλυτικές κατευθύνσεις. Για παράδειγμα, τη παράγωγος της $y=1/x$ μπορεί αμέσως να καταλάβουμε ότι είναι $1/x^2$. Ελέγξτε το!

Άσκηση: Δείξαμε ότι οι παραβολές έχουν σταθερές υποκανονικές. Τι είδος καμπύλων έχουν σταθερές υπεφαπτομένες; (Η απάντηση δίνεται μετά τις αναφορές).

Για να αποκτήσουν το είδος της εμπειρικού βιώματος που ο Lakatos [15] προτείνει ότι είναι βασικό στην μαθηματική ανακάλυψη, οι άνθρωποι θα πρέπει να ενθαρρύνονται να σχεδιάσουν, οικοδομήσουν και διερευνήσουν τις δικές τους συσκευές και προσομοιώσεις σε υπολογιστές. Κάποια εμπειρία με μηχανικές συσκευές μπορεί να βοηθήσει πάρα πολύ πολλούς μαθητές καθώς προσπαθούν να κατανοήσουν τον χειρισμό ενός λογισμικού όπως το Geometer's Sketchpad. Όλες οι αλγεβρικές καμπύλες, για παράδειγμα, μπορούν να σχεδιαστούν με συνδέσμους [3] κάποιες εύκολα κατασκευάζονται και άλλες καλύτερα αναπαριστώνται. Η διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στα μαθηματικά, την προσομοίωση και την μηχανική μπορεί να είναι πολύ συγκεχυμένη. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η γεωμετρία και η άλγεβρα συμπληρώνουν, επικυρώνουν και ενδυναμώνουν η μια την άλλη χωρίς να μορφοποιούν κάποια ιεραρχία.

Μετά από πολλά χρόνια εργασίας στην μαθηματική εκπαίδευση όλων των βαθμίδων, έχουμε φτάσει να πιστεύουμε ότι η αποδοτική εκπαιδευτική πρακτική πρέπει να εμπλέκει τους ανθρώπους σε έναν εξισορροπημένο διάλογο ανάμεσα στην «προσγειωμένη δραστηριότητα» και τη «συστηματική διερεύνηση» [6]. Αυτή η συζήτηση της παραβολής παρέχει ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός τέτοιου διαλόγου.

Αναφορές:

1. Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections, (Vol. 11 of The Great Books of the Western World), Encyclopedia Brittanica Inc., Chicago, (1952).
2. V. I. Arnol'd, Huygens & Barrow, Newton & Hooke , Birkhäuser Verlag, Boston, (1990).
3. I. I. Artobolevskii, Mechanisms for the Generation of Plane Curves, Macmillan, New York, (1964).
4. F. Cajori, Controversies on Mathematics Between Wallis, Hobbes, and Barrow, The Mathematics Teacher Vol.XXII Num. 3 (1929) 146 - 151.
5. J. M. Child, The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Open Court, Chicago, (1920).
6. J. Confrey, The role of technology in reconceptualizing functions and algebra. In Joanne Rossi Becker and Barbara J. Pence (eds.) Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education , Pacific Grove, CA, October 17-20. Vol. 1 (1993) 47-74. The Center for

Mathematics and Computer Science Education at San José State University, San José, CA.
7. J. L. Coolidge, A History of Conic Sections and Quadratic Surfaces, Dover Publications, New York, (1968).
8. D. Dennis, Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions, (1994), Unpublished Doctoral Dissertation, Cornell University.
9. D. Dennis & J. Confrey, The Creation of Binomial Series: A Study of the Methods and Epistemology of Wallis, Newton, and Euler, unpublished research, available from the authors, (1994).
10. R. Descartes, The Geometry , Open Court, LaSalle, IL, (1952).
11. C. H. Edwards, The Historical Development of Calculus, Springer-Verlag, New York, (1979).
12. L. Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, (2 volumes) Springer-Verlag, New York, (1988, 1990).
13. M. Gardner, Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers, W.H. Freeman, New York, (1989).
14. N. Jackiw, Geometer's Sketchpad ™ (version 2.1), [Computer Program], Key Curriculum Press, Berkeley, CA., (1994).
15. I. Lakatos, Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press, New York, (1976).
16. A. Lenard, Kepler Orbits, More Geometrico. , The College Mathematics Journal, Vol. 25, No. 2, (1994) 90-98
17. T. Lenoir, Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes' geometry, Historia Mathematica, 6, (1979) 355-379.
18. M. E. Munroe, Calculus , Saunders, Philadelphia, (1970).
19. T. S. Row, Geometric Exercises in Paper Folding, Dover, New York, (1966).
20. E. Smith, & D. Dennis, & J. Confrey, Rethinking Functions, Cartesian Constructions, The History and Philosophy of Science in Science Education , Proceedings of the Second International Conference on the History and Philosophy of Science and Science Education , vol. 2 (1992), 449 - 466, S. Hills (Ed.) The Mathematics, Science, Technology and Teacher Education Group; Queens University, Kingston, Ontario.
21. D. J. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Harvard University Press, Cambridge MA, (1969).
22. J. Van Maanen, Seventeenth century instruments for drawing conic sections, The Mathematical Gazette , vol. 76, n. 476, (1992), 222-230.
23. F. Van Schooten, Exercitationum Mathematicorum libri quinque, Leiden, 1657. (original edition in the rare books collection of Cornell University, Ithaca New York).

Απάντηση στην Άσκηση:

Οι εκθετικές συναρτήσεις πάντα έχουν μια σταθερή υπεφαπτομένη. Αυτή η ιδιότητα θεωρήθηκε σαν την σφραγίδα αναγνώρισης τέτοιων καμπυλών από τον Descartes και άλλους τον 17^o αιώνα [17]. Χρησιμοποιώντας το συνηθισμένο σύστημα συντεταγμένων, η τιμή της σταθεράς υπεφαπτομένης είναι ίση με τον αντίστροφο της κλίσης της καμπύλης στο (0, 1), επομένως η $y=e^x$ έχει σταθερή επεφαπτομένη 1. (Για μια συζήτηση σε αυτή την ερώτηση και σε πολλές άλλες σαν κι αυτή, δείτε το [8].)

Σχόλια δικά μου:

Σχετικά με το άρθρο:

1. Ο μηχανισμός κατασκευής της παραβολής του Van Schooten εδώ: http://homepage.mac.com/dscher/schooten.html
2. Η κατασκευή της παραβολής με διπλώσεις στο χαρτί ή δυναμικά με το Geometer's Sketchpad εδώ: http://homepage.mac.com/dscher/foldedrect.html
3. Η απάντηση στο ερώτημα αν η διευθετούσα ήταν κύκλος και όχι ευθεία γραμμή, εδώ: http://homepage.mac.com/dscher/foldedcirc.html (στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε έλλειψη στη δεύτερη υπερβολή)
4. Historical mechanisms for Drawing Curves http://ecommons.cornell.edu/bitstream/1813/2718/1/2004-9.pdf
5. Exploring linkages http://kmoddl.library.cornell.edu/linkages/
6. Curve drawers http://www.museo.unimo.it/labmat/drawers.htm
7. Curves and mechanisms http://php.math.unifi.it/archimede/archimede_NEW_inglese/curve/geomeccan0.php?id=8

Άλλα σχετικά με την διδακτική μαθηματικών με υπολογιστή:

8. Μηχανισμός κατασκευής της υπερβολής του Van Schooten εδώ: http://homepage.mac.com/dscher/vhyp.html
9. Μηχανισμός κατασκευής της έλλειψης του Van Schooten εδώ: http://homepage.mac.com/dscher/vellipse.html
10. Εφαρμογές Java Sketchpad του Daniel Scher http://homepage.mac.com/dscher/
11. Η διατριβή του Daniewl Scher "Students' conceptions of geometry in a dynamic geometry software environment" http://homepage.mac.com/dscher/Dissertation.pdf
12. Math education and technology http://www.ies.co.jp/math/indexeng.html ενδιαφέρουσες διδακτικές προτάσεις όπως αυτή με τον νόμο ημιτόνων: http://www.ies.co.jp/math/java/trig/seigen/seigen.html ή την διαίρεση ενός τριγώνου σε δύο ισεμβαδικά: http://www.ies.co.jp/math/products/geo1/applets/tri2tobun/tri2tobun.html